



### 3. NÚMEROS ENTEROS.

#### 3.1. Introducción.

Existen diversas situaciones de la vida cotidiana que los números naturales no son capaces de diferenciar por sí solos:

- si tenemos **10 €** o le debemos **10 €** a una amiga,
- si estamos pasando mucho calor porque estamos a **40°** o tenemos mucho frío porque estamos a **40°** bajo cero,
- si nos encontramos en la segunda planta de un edificio o en el segundo subterráneo de un aparcamiento,
- si hablamos de un acontecimiento que ocurrió en el año **313** antes de Cristo o, por el contrario, en el año **313** después de Cristo,
- si nos referimos a la altura del Mulhacén, con **3481 m**, o a la profundidad de la fosa de las Marianas, con **11034 m**.

Todas estas situaciones se pueden diferenciar fácilmente cuando disponemos de los *números negativos*, que se definen como los *números opuestos* de los números naturales, entendiendo por opuesto de un número aquel que al sumarlo con él da el elemento neutro de la suma, que es el cero:

Ejemplo: El opuesto de **2** (tener 2) es **-2** (deber 2) ya que  $2+(-2)=0$  (si tengo 2 y debo 2 no tengo nada)

El opuesto de **0** (tener 0) es **0** (deber 0) ya que  $0+0=0$  (si tengo 0 y debo 0 no tengo nada)

De esta forma, expresaríamos las situaciones anteriores de la siguiente forma:

- tengo **10 €** (+10 €) o debo **10 €** (-10 €),
- hace mucho calor (**40°**) o mucho frío (**-40°**),
- estamos en la segunda planta (+2) o en el segundo subterráneo (-2),
- hablamos del año **313 a.C.** (-313) o del año **313 d.C.** (313),
- la altura del Mulhacén es **3481 m** o la profundidad de la fosa de las Marianas es **-11034 m**.

Desde un punto de vista más matemático, nos encontramos con que:

- la suma de dos números naturales siempre es otro número natural ( $34+128=162$ ) y, por tanto, podemos decir que la suma es una operación (interna) en el conjunto de los números naturales.
- la multiplicación de dos números naturales es un número natural ( $2\cdot 3=2+2+2=3+3=6$ ), ya que se trata de una suma de sumandos iguales y, por tanto, también podemos decir que el producto es una operación en el conjunto de los números naturales.
- sin embargo, la resta de dos números naturales no siempre es un número natural ( $16-7=9$  pero  $7-16=?$ ). Es necesario que el minuendo sea mayor que el sustraendo para poder realizar la resta entre dos números naturales. Pues bien, este problema igualmente queda solucionado con la aparición de los números negativos, como veremos a continuación.

Así pues, nos encontramos con los siguientes conjuntos:

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \text{ números enteros positivos}$$

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1\} \text{ números enteros negativos (opuestos de los positivos)}$$

$\{0\}$  el cero, que es un número entero, pero no es positivo ni negativo

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ \text{ números enteros}$$

y podemos afirmar que el conjunto de los números enteros es más grande e incluye al conjunto de los números naturales, es decir, el conjunto de los números naturales es un subconjunto del conjunto de los números enteros:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

### 3.2. Valor absoluto de un número entero.

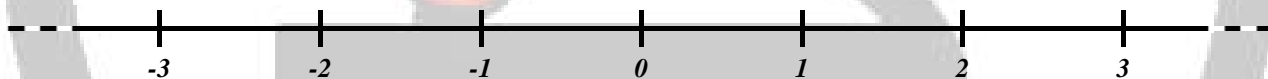
(A) El *valor absoluto* de un número entero es el número natural que resulta al suprimir su signo.

(B) *Ejemplos:*

$$|-8| = 8 \quad ; \quad |+7| = |7| = 7 \quad ; \quad |230| = 230 \quad ; \quad |-49| = 49 \quad ; \quad |0| = 0$$

### 3.3. Representación lineal de los números enteros.

También representamos los números enteros en una recta. El 0 y los enteros positivos, es decir, los naturales, los representamos como ya sabemos. Los números enteros negativos los dibujaremos a la izquierda del 0, señalándolos a la misma distancia entre sí e igual que la distancia utilizada para los naturales.



### 3.4. Orden de los números enteros (< significa “menor que”; > significa “mayor que”).

(A) Si los dos números son positivos, es decir, naturales, no tenemos problema en identificar cuál de los dos es mayor y cuál es menor:  $15 < 27$ .

(B) Si un número es positivo y el otro 0, siempre es mayor el número positivo (precisamente ésta es la definición: un número es positivo si es mayor que cero):  $96 > 0$ .

(C) Si un número es 0 y el otro es negativo, siempre es menor el número negativo (ésta es la definición: un número es negativo si es menor que cero):  $-34 < 0$ .

(D) Si un número es positivo y el otro es negativo, siempre es menor el negativo:  $-8 < 62$ .

(E) Si los dos números son negativos, es mayor el que tenga menor valor absoluto, es decir, imaginamos que los dos son positivos, los comparamos y decidimos lo contrario:

$$-48 > -53 \text{ ya que } 48 < 53 \quad ; \quad -5 < -3 \text{ ya que } 5 > 3 \quad ; \quad -17 > -39 \text{ ya que } 17 < 39$$

Gráficamente, siempre será mayor el número situado más a la derecha y, por tanto, menor el que esté más a la izquierda. Este criterio sirve para no confundirse, pero no es una definición correcta de orden, por lo que no es válida para justificar una ordenación de números enteros.



### 3.5. Operaciones con números enteros.

#### SUMA.

- (A) \* El resultado de sumar varios números positivos es un número positivo.  
 \* El resultado de sumar varios números negativos es un número negativo.  
 \* El resultado de sumar un número positivo y un número negativo es un número:  
 a) positivo si el valor absoluto del n° positivo es mayor que el valor absoluto del negativo.  
 b) negativo si el valor absoluto del n° negativo es mayor que el valor absoluto del positivo.
- (B) *Ejemplos:*  $2+7=9$  (tengo 2 y tengo 7, luego tengo 9) ;  $(-6)+4=-2$  (debo 6 y tengo 4, luego debo 2).  
 $9+(-7)=4$  (tengo 9 y debo 7, luego tengo 2) ;  $-1+(-5)=-6$  (debo 1 y debo 5, luego debo 6).

#### (C) Ejercicios:

OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
$7+4$	11	$8+5$	13	$1+14$	15
$37+48$	85	$97+52$	149	$13+46$	59
$(-7)+(-4)$	-11	$(-8)+(-5)$	-13	$(-37)+(-48)$	-85
$-37+(-48)$	-85	$-97+(-52)$	-149	$-13+(-46)$	-59
$(-7)+4$	-3	$8+(-5)$	3	$(-37)+48$	11
$37+(-48)$	-11	$-97+52$	-45	$-13+46$	33
$78+65$	143	$(-54)+36$	-18	$(-4)+17$	13
$-41+(-70)$	-111	$13+(-35)$	-22	$89+(-47)$	42
$(-54)+(-28)$	-82	$123+456$	579	$24+(-67)$	-43
$-90+(-62)$	-152	$35+(-12)$	23	$29+64$	93
$78+(-51)$	27	$-38+14$	-24	$-32+(-47)$	-79
$36+(-50)$	-14	$-9+10+(-14)+5$	-8	$-2+(-7)+11+(-9)+3$	-4
$(-8)+4+(-7)+(-9)$	-20	$12+2+(-7)+(-14)$	-7	$6+(-10)+10+(-5)$	1
$5+(-2)+3+(-9)+2+(-3)$	-4	$(-8)+12+(-5)+7$	6	$-15+30+(-19)+20+(-3)$	13
$-12+8+(-10)+4+(-7)$	-17	$-20+(-8)+4+(-5)$	-29	$15+(-6)+11+2+(-4)$	18
$(-8)+3+4+(-4)$	-5	$80+25+(-3)+(-2)$	100	$-5+(-15)+6+(-8)$	-22
$-9+10+(-14)+5$	-8	$(-2)+(-7)+11+(-9)+3$	-4	$-3+2+(-5)+(-7)+(-1)+(-3)$	-17
$-1+3+(-2)+(-2)$	-2	$15+(-6)+11+2+(-4)$	18	$3+4+(-2)+(-6)+5+(-1)$	3
$3+4+(-2)+(-6)+5+(-11)+(-18)$	-25	$7+(-8)+(-13)+2+(-9)+1$	-20	$-3+5+(-4)+2+7+(-2)+3+(-15)$	-7

RESTA.

(A) Elementos que aparecen en una resta de dos números:

$$\begin{array}{r} 9182 \rightarrow \text{Minuendo} \\ -7364 \rightarrow \text{Sustraendo} \\ \hline 1818 \rightarrow \text{Diferencia} \end{array}$$

(B) Definición de resta de dos números:

- \* El opuesto de un número entero es otro número entero tal que al sumarlos da cero.  
 Ej:  $-3$  es el opuesto de  $3$  porque  $-3+3=0$  ;  $7$  es el opuesto de  $-7$  porque  $7+(-7)=0$ .
- \* "Para restar dos números, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo"

(B) Ejemplos:

$7 - 4 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Minuendo} = 7 \\ \text{Sustraendo} = 4 \Rightarrow \text{Opuesto} = -4 \end{array} \right\} = 7 + (-4) = 3$	$8 - (-5) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Minuendo} = 8 \\ \text{Sustraendo} = -5 \Rightarrow \text{Opuesto} = 5 \end{array} \right\} = 8 + 5 = 13$
$-6 - 5 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Minuendo} = -6 \\ \text{Sustraendo} = 5 \Rightarrow \text{Opuesto} = -5 \end{array} \right\} = -6 + (-5) = -11$	$-11 - (-15) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Minuendo} = -11 \\ \text{Sustraendo} = -15 \Rightarrow \text{Opuesto} = 15 \end{array} \right\} = -11 + 15 = 4$

(D) Simplificación de signos: escribir la operación con el menor número de signos posible.

Esto es FUNDAMENTAL para facilitar la realización de cuentas con números enteros y, por tanto, es lo primero que se debe hacer siempre cuando nos enfrentamos a una.

\* Los signos + de los números positivos no es necesario escribirlos:

$+5+(+7)=5+7=12$	$+6+(-3)=6+(-3)=3$	$-4+(+11)=-4+11=7$	$-2+(-8)=-10$
------------------	--------------------	--------------------	---------------

\* Si aparecen seguidos (¡separados por paréntesis!) los signos + y -, podemos escribir -:

$5+(-7)=5-7=-2$	$-6+(-3)=-6-3=-9$	$-4-(+11)=-4-11=-15$	$2-(+8)=2-8=-6$
-----------------	-------------------	----------------------	-----------------

\* Si aparecen seguidos (¡separados por paréntesis!) dos signos - ó +, podemos escribir +:

$5-(-7)=5+7=12$	$-6-(-3)=-6+3=-3$	$-4-(-11)=-4+11=7$	$2+(+8)=2+8=10$
-----------------	-------------------	--------------------	-----------------

A partir de ahora, cuando vayamos a hacer una operación en la que sólo haya sumas y restas, no será necesario ir de izquierda a derecha, siempre y cuando tengamos claro que **los signos que aparecen en la operación no se pueden separar del nº que va a continuación** y, así, la operación que siempre vamos a realizar es una **suma**. Podemos utilizar dos estrategias:

a) Sumar los  $n^{\text{os}}$  positivos con los positivos y los negativos con los negativos y, después, los resultados:  $-7 + (-5) - (-8) - (+1) + (+6) = -7 - 5 + 8 - 1 + 6 = (-7 - 5 - 1) + (8 + 6) = (-13) + 14 = 1$

b) Ir en el orden que queramos:  $8 - 9 + (-5) - (-4) = 8 - 9 - 5 + 4 = 8 - 9 - 1 = 8 - 10 = -2$

$$-7 - (-5) + (-11) - (+9) = \underbrace{-7 + 5}_{-2} - \underbrace{11 + 9}_{20} = -2 - 20 = -22$$



(E) Ejercicios:

OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
7-4	3	8-5	3	1-14	-13
37-48	-11	97-52	45	13-46	-33
(-7)-(-4)	-3	(-8)-(-5)	-3	-1-14	-15
-37-(-48)	11	-97-(-52)	-45	-13-(-46)	33
(-7)-4	-11	8-(-5)	13	(-37)-48	-85
37-(-48)	85	-97-52	-149	-13-46	-59
78-65	13	(-54)-36	-90	(-4)-17	-21
-41-(-70)	29	13-(-35)	48	89-(-47)	136
(-54)-(-28)	-26	123-456	-333	24-(-67)	91
-90-(-62)	-28	35-(-12)	47	29-64	-35
78-(-51)	129	-38-14	-52	-32-(-47)	15
36-(-50)	86	-9-10	-19	-2-(-7)	5
-24-(-67)	43	-90-62	-152	-35-(-12)	-23
101-(-23)	124	-101-23	-124	101-23	78
15-51	-36	29-(-64)	93	-98-(-76)	-22
-98-76	-174	98-76	22	98-(-76)	174
-29-75	-104	13-(-56)	69	-78-(-29)	-49
-38-(-14)	-24	84-30	54	11-37	-26
78-51	27	-16-43	-59	78-46	32
-31-(-72)	41	-32-47	-79	36-50	-14
-5+(-6)-7	-18	5+(-6)-7	-8	-5-(-6)+7	8
-5-(-6)-(-7)	8	5-(-6)-7	4	-5-(-6)+(-7)	-6
-5+(-6)-(-7)	-4	-15+(-16)+17	-14	5+(-6)+7	-6
9-(8-7-6)	14	1+(-2)-(-3)+4	6	11-(-12)-13+(-14)	-4
6-(7-8)-9	-2	-1-(-2)+(-3)-4	-6	11-12+(-13)-(-14)	0
-8+4-(-7)+(-9)	-6	-(2+2-7-14)	17	-6+(-10)-10+(-5)	-31
5-(-2)+3+(-9)-2+(-3)	-4	-8+12-(-5+7)	2	15-30+(-19)-20+(-3)	-57
-12-8-(-10)+4-(-7)	1	-20-(-8)+4+(-5)	-13	-1-(-6)+11-2+(-4)	10
-8-3+4-(-4)	-3	80+25+(-3)-(-2)	104	-5-(-15)+6-(-8)	24
-9+10-(-14)-15	0	(-2)-(-7)+11-(-9)+3	28	-3+2-(-5)+(-7)+(-1)-(-3)	-1
-1+3-(-2)+(-2)	2	15+(-6)-11+2-(-4)	4	3-4+(-2)-(-6)+5+(-1)	7
-3+4-(-2)+(-6)-5+(-11)-(-18)	-1	7-(-8)+(-13)+2+(-9)-1	-6	-3+5+(-4)-2+7+(-2)+3-(-15)	19



PRODUCTO y DIVISIÓN.

(A) Regla de los signos para la multiplicación y para la división:

$+ \cdot + = +$	$+ : + = +$	Si los dos signos son iguales el resultado es +	Generalización: nº par de signos - = +
$- \cdot - = +$	$- : - = +$		
$+ \cdot - = -$	$+ : - = -$	Si los dos signos son distintos el resultado es -	Generalización: nº impar de signos - = -
$- \cdot + = -$	$- : + = -$		

(B) Ejercicios:

OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
37·48	1776	97·52	5044	13·46	598
-37·(-48)	1776	-97·(-52)	5044	-13·(-46)	598
37·(-48)	-1776	-97·52	-5044	-13·46	-598
78·65	5070	(-54)·36	-1944	(-4)·17	-68
-41·(-70)	2870	13·(-35)	-455	89·(-47)	-4183
(-54)·(-28)	1512	123·456	56088	24·(-67)	-1608
-90·(-62)	5580	35·(-12)	-420	29·64	1856
78·(-51)	-3978	-38·14	-532	-32·(-47)	1504
36·(-50)	-1800	-9·10	-90	-2·(-7)	14
15·51	765	-101·23	-2323	-98·(-76)	7448
-98·76	-7448	98·76	7448	98·(-76)	-7448
-29·75	-2175	13·(-56)	-728	-78·(-29)	2262
-38·(-14)	532	84·30	2520	11·37	407
78·51	3978	-16·43	688	78·46	3588
-31·(-72)	2232	-32·47	-1504	36·50	1800
38:19	2	99:(-11)	-9	(-99):3	-33
(-8):(-4)	2	(-35):(-5)	7	(-54):(-6)	9
(-16):4	-4	8:(-2)	-4	(-36):2	-18
130:65	2	(-108):36	-3	(-68):17	-4
70:(-35)	-2	89:(-89)	-1	0:(-28)	0
402:(-67)	-6	-198:(-18)	11	48:(-12)	-4
153:(-51)	-3	-56:14	-4	-94:(-47)	2
420:14	30	(-96):12	-8	124:(-4)	-31
320:64	5	6250:(-50)	-125	(-90):(-15)	6
(-99):9	-11	(-350):(-70)	5	123:3	41



### 3.6. Operaciones combinadas con números enteros.

(A) Normas para la realización correcta de las operaciones:

- 1º Paréntesis y similares (corchetes, llaves), desde los más internos a los más externos.
- 2º Potencias y raíces.
- 3º Multiplicaciones y divisiones.
- 4º Sumas y restas.

(B) Norma para realizar operaciones que no tienen preferencia una sobre la otra (del mismo nivel):

\* Se hacen conforme van apareciendo (¡de izquierda a derecha!).

(C) Ejemplos:

$\begin{array}{c} \underbrace{-9:3} + 11 - \underbrace{2 \cdot (-5)} \\ \underbrace{-3} + 11 + 10 \\ \underbrace{8 + 10} = 18 \end{array}$	$\begin{array}{c} 2^4 : 8 - (-1) + \underbrace{(-4) \cdot 3^2} : (-6) = \underbrace{2^4} : 8 + 1 - \underbrace{4 \cdot 3^2} : (-6) = \\ \underbrace{16 : 8} + 1 - \underbrace{4 \cdot 9} : (-6) = 2 + 1 - \underbrace{36} : (-6) = 2 + 1 + 6 = 9 \end{array}$
$\begin{array}{c} \underbrace{-2 \cdot 3 : 1} - \underbrace{(15 : 3 - 2)} - \underbrace{(-9)} + \underbrace{(-6) : 2 \cdot 7} \\ \underbrace{-2 \cdot 3 : 1} - \underbrace{(15 : 3 - 2)} + 9 - \underbrace{6 : 2 \cdot 7} \\ \underbrace{-6 : 1} - \underbrace{(5 - 2)} + 9 - \underbrace{3 \cdot 7} \\ \underbrace{-6} - 3 + 9 - 21 \\ \underbrace{-9 + 9} - 21 \\ 0 - 21 = -21 \end{array}$	$\begin{array}{c} 2 \cdot 6 : 3 - 4 + 5 - \underbrace{(8 \cdot 3 - 2 - 18)} + 2 \cdot \underbrace{(5 + 4 : 2)} - \underbrace{(7 - 1) : 3} + 6 : 2 \cdot 7 : 3 \\ 2 \cdot 6 : 3 - 4 + 5 - \underbrace{(8 \cdot 3 - 2 - 18)} + 2 \cdot \underbrace{(5 + 4 : 2)} - \underbrace{(7 - 1) : 3} + 6 : 2 \cdot 7 : 3 \\ 2 \cdot 6 : 3 - 4 + 5 - \underbrace{(8 \cdot 3 - 2 - 18)} + 2 \cdot \underbrace{(5 + 4 : 2)} - \underbrace{(7 - 1) : 3} + 6 : 2 \cdot 7 : 3 \\ \underbrace{12 : 3} - 4 + 5 - \underbrace{(24 - 2 - 18)} + 2 \cdot \underbrace{(5 + 2)} - \underbrace{6 : 3} + \underbrace{3 \cdot 7 : 3} \\ 4 - 4 + 5 - \underbrace{(22 - 18)} + \underbrace{2 \cdot 7} - 2 + \underbrace{21 : 3} \\ 4 - 4 + 5 - 4 + 14 - 2 + 7 \\ 0 + 5 - 4 + 14 - 2 + 7 \\ 5 - 4 + 14 - 2 + 7 \\ 1 + 14 - 2 + 7 \\ 15 - 2 + 7 \\ 13 + 7 \\ 20 \end{array}$
$\begin{array}{c} \underbrace{-4 \cdot (-3) : (-2)} - \underbrace{[15 : (-5) - 1]} + 9 - \underbrace{(-8) \cdot 2 \cdot (-3)} \\ \underbrace{-4 \cdot (-3) : (-2)} - \underbrace{[15 : (-5) - 1]} + 9 + \underbrace{8 \cdot 2 \cdot (-3)} \\ \underbrace{12 : (-2)} - \underbrace{(-3 - 1)} + 9 + \underbrace{4 \cdot (-3)} \\ \underbrace{-6} - \underbrace{(-4)} + 9 - 12 \\ \underline{\underline{-6 + 4 + 9 - 12}} = \underline{\underline{13 - 18}} = -5 \end{array}$	



(D) Ejercicios:

OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
$(-36):(-6):2$	3	$(-36):[(-6):2]$	12	$18:(-3)-(-8)$	2
$2\cdot(-7)\cdot(-4)$	56	$2-5-7-3+15$	2	$14-24:3+6:2$	9
$80-(50-20):5$	74	$-2\cdot7+5\cdot6$	16	$4\cdot(-20)-2\cdot(-40)$	0
$5\cdot10-4\cdot(-20)$	130	$5\cdot[-3+7]$	20	$-2\cdot[8-4-(-10)]$	-28
$150:(7-12)$	-30	$(20-12):(-2)$	-4	$(35-15):(5-7)$	-10
$(6-2-10):(5-11)$	1	$(10-3+4)-(9-2+8)$	-4	$-3+5-9-(-4+11+6)$	-20
$-(-8)+12+(-5)+7$	22	$-15+30+(-19)+20$	16	$-12+8+(-10)+4$	-10
$-20-(-8+4-5)$	-11	$-(-8)-(-4-7-9)$	20	$(-8\cdot3+4):(-4)$	5
$12-[2+(-7)-14]$	31	$5-[2-(3-9)+(2-3)]$	-2	$15-6\cdot[11+2\cdot(-4)]$	-3
$-[6-(-10)-10-5]$	-1	$80:[25-3+(-2)]$	4	$[-5-(-15)]:[6-8]$	-5
$-9+10-(-14)+5$	20	$(-2)+(-7)-(-11)-9+3$	-4	$(-1)\cdot3\cdot(-2)\cdot(-2)$	-12
$4\cdot6+2\cdot8-3\cdot4$	28	$4\cdot6+(2\cdot8-3)\cdot4$	76	$4\cdot(6+2)\cdot8-3\cdot4$	244
$4\cdot(6+2\cdot8)-3\cdot4$	76	$4\cdot6+2\cdot(8-3)\cdot4$	64	$4\cdot(6+2\cdot8-3)\cdot4$	304
$2+3\cdot5-1$	16	$(2+3)\cdot5-1$	24	$(2+3)\cdot(5-1)$	20
$6-2\cdot3+4\cdot3$	12	$2+6:(-3)-2\cdot5+3\cdot(1-4)$	-19	$2\cdot(-7)-8\cdot(-4)-(-5)\cdot(-2)$	8
$-5\cdot[-5+2-(4+6-1)]$	60	$18+2\cdot(5-9)-3\cdot(10-7)$	1	$30-(-2)\cdot(-10)+(-5)\cdot8$	-30
$3\cdot[4-2\cdot(5-11)]-18$	30	$25-[4-(3-9)]$	15	$3-(-5)+(-7)-[2-(-10)]$	-11
$16-[16-(16-4)]+(-16)$	-4	$2+3\cdot(5-1)$	14	$2\cdot5+3\cdot4-2\cdot8$	6
$3+5\cdot2+1$	14	$4\cdot3-2+5\cdot2$	20	$5\cdot(2+4)-6$	24
$3\cdot(6-4)+5\cdot(3+1)$	26	$16-5\cdot(8-6)+4\cdot2$	14	$18-3\cdot(4\cdot2-7)-15$	0
$5+[15-(2+10)+7-9]-3$	3	$425-12\cdot28+4\cdot(28-7)$	173	$3+5\cdot(4+2):15-4$	1
$2+3\cdot(9-3\cdot2+3)$	20	$14+6+(-4)-9-(-3)+(-8)$	2	$12-25+4+(-9)-(-2)+(-11)$	-27
$12:(-3)+(-23)$	-27	$-3\cdot2-[-5+(-7)-(-1)]\cdot(-3)$	-39	$[-6-(-3)]:[5-(-2)]$	-21
$-8\cdot9:6+17-(-3)$	8	$3\cdot[4+(-6)]-(-2)\cdot(8-4)$	2	$6+(3-5+4)\cdot2-3\cdot(6-9+8)$	-5
$-4:(-2)\cdot5+(-1)-7$	2	$23+34\cdot12+5$	436	$12+3\cdot(4-6:2)$	15
$15:3\cdot4:10+7-4-4:2+3-6$	0	$2+6:(-3)-2\cdot5+3\cdot(1-4)$	-19	$-30-(-2)\cdot(-10)+(-5)\cdot8$	-90
$-5\cdot[-5+2-(4+6-1)]$	60	$18+2\cdot(5-9)-3\cdot(10-7)$	1	$17-8\cdot3:6+5\cdot2-7+9-1$	24
$3\cdot[4-2\cdot(5-11)]-18$	30	$9+6:3-2\cdot5+3\cdot(6-4)$	7	$-12(-3)+8(-5)$	-4
$-7\cdot(8-5)+24:(-13+7)$	-25	$-14\cdot21-32:(-4)$	-286		



OPERACIÓN	SOL.	OPERACIÓN	SOL.
$(6-4 \cdot 3:6+10-5)+(3+4 \cdot 5-15:3)$	27	$7+3 \cdot 4:2-5 \cdot 6:3+4+9-2 \cdot (3-1)$	12
$103-37 \cdot 2+45-24:4 \cdot 3-23-15:5$	30	$7+15-[14-(2+10)+7 \cdot 3-(9-4) \cdot 3]-1+4$	17
$7-5 \cdot 2:5+6:(4-3)-2+(3+4 \cdot 5-15:3)$	27	$6+4 \cdot 7:2-4 \cdot 6:3-5+9-2 \cdot (6-1)$	6
$215-49 \cdot 3+76-24:4 \cdot 5:3-57-36:4$	68	$10+15:3+(12-7-3)+7 \cdot 3-14-(3+6-1)$	16
$13+4 \cdot 5:3:6-10-5 \cdot 2+7+11-(2+4 \cdot 5-18:3 \cdot 2)$	11	$8+4:2-3 \cdot 2+3 \cdot (7-2)-9:3 \cdot 7:3+5 \cdot 4 \cdot (7-6)$	13
$15+9 \cdot 4:3-20:4 \cdot 3:5-(2 \cdot 4-5+3+6-1)+9-5 \cdot (6-2)$	2	$2 \cdot (-3) \cdot 4:(-6)-(-15):(-3) \cdot 2+(-1) \cdot 7 \cdot 2$	-21
$-12-(-20)-[6+(5-9)-(16-8-11)]$	3	$-5+(-3)-(-2)+(-10)+9-(-3)$	-4
$-2-3 \cdot 4+7-(-3)+4:2 \cdot 3-(5+1-8)$	4	$2+4 \cdot 3-(5 \cdot 4):2+7-2 \cdot 2+3-15$	-5
$(-4)-(-3)-2+(-2)+(-3)-(-4)$	-4	$2 \cdot 3 \cdot 4:(-3)+(-15):(-3)-(-8):2-(-6):(-3)$	-1
$-[-(4-2 \cdot 5+3-4 \cdot 2)+(-3)-(-2) \cdot 2+(-3)-14:7+(-6)]$	-1	$8 \cdot (-2 \cdot 4+3)-16:(-12:6-3 \cdot 2)$	-38
$3 \cdot (-4 \cdot 2+12:6)+16:(-2 \cdot 3+8:4)$	-22	$-4 \cdot [8:(-11+7)+3 \cdot (-2+6)]$	-40
$-12:[-4 \cdot (5-3)-2 \cdot (-23+21)]+5 \cdot [-16:(21-13)-3 \cdot (-7+15)]$	-127	$-10:[(-12+16):(-2)+(12-3 \cdot 5)]+5 \cdot [(-13+7):(-1+(-27)):(-9)]$	-13
$-18+[52:(-2)-(-13)]:(-1)-11 \cdot 12$	-137	$-7 \cdot 8:8-14+2^2 \cdot 3-7-(-15):(-3) \cdot 2-(-1)+(-9)$	-34
$[(-8) \cdot 3:(-6)-(-5)]:(-3)+(-7)-4 \cdot (-9):(-6)$	-16	$(-15):(-5)+7 \cdot (-4)-[(-3) \cdot 2+(-1)]-(-7)$	-11
$-1+[(-2):2 \cdot (-1)-(-3)]:(-2)+(-1)-(-3) \cdot (-2)$	-10		

Es fácil comprobar que se cumplen las siguientes propiedades para las operaciones internas definidas en el conjunto de los números enteros:

**SUMA:** Operación interna (la suma de dos  $n^{\text{os}}$  enteros es otro  $n^{\text{o}}$  entero)

- Asociativa:  $(-2+6)+9=4+9 = 13 = -2+(6+9)=-2+15$
- Elemento neutro:  $-45+0=-45$
- Elemento opuesto:  $-11+11=0$
- Propiedad conmutativa:  $3+(-6) = -3 = -6+3$

Por tanto, los  $n^{\text{os}}$  enteros con la suma,  $(\mathbb{Z}, +)$ , son un grupo conmutativo o abeliano.

**PRODUCTO:** Operación interna (el producto de dos  $n^{\text{os}}$  enteros es otro  $n^{\text{o}}$  entero)

- Asociativa:  $(-3 \cdot 11) \cdot (-2) = -33 \cdot (-2) = 66 = -3 \cdot [11 \cdot (-2)] = -3 \cdot (-22)$
- Elemento neutro:  $-5 \cdot 1 = -5$
- Propiedad conmutativa:  $7 \cdot (-6) = -42 = (-6) \cdot 7$

Por tanto, los  $n^{\text{os}}$  enteros con el producto,  $(\mathbb{Z}, \cdot)$ , son un semigrupo conmutativo o abeliano.

- Propiedad distributiva:  $2 \cdot (-5+4) = 2 \cdot (-1) = -2 = 2 \cdot (-5) + 2 \cdot 4 = -10+8$

Así pues, los  $n^{\text{os}}$  enteros con ambas operaciones,  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  son un anillo conmutativo.

### 3.7. Problemas de números enteros.

(A) Recordemos que el procedimiento para resolver cualquier problema aritmético consiste en:

- Comprensión del enunciado.
- Planificación de la resolución.
- Ejecución del plan de resolución.
- Revisión del resultado y el proceso seguido.

(B) Ejemplos:

\* En un autobús viajan **15** pasajeros. Al llegar a la parada, bajan **9** y suben **12**. ¿Cuántos pasajeros hay ahora en el autobús?

a) Comprensión del enunciado:

Pasajeros que hay en el autobús = ...

Número de pasajeros que bajan en la parada = ...

Número de pasajeros que suben en la parada = ...

Dato desconocido = ...

b) Planificación de la resolución: Para resolver el problema, hemos de tener claro con qué número y con qué signo identificamos cada una de las acciones posibles. Así: bajar = ... ; subir = ...

c) Ejecución del plan de resolución: Escribir la operación que tenemos que realizar y la hacemos:

$$15+(-9)+12=18.$$

d) Revisión del resultado y el proceso seguido: Calcula primero el número de pasajeros que quedan en el autobús cuando se bajan. Añade ahora los que se suben. El resultado debe coincidir con el anterior. El resultado obtenido, ¿te parece razonable?

(C) Problemas:

1. Expresa mediante número enteros las siguientes situaciones:

- |                                      |                                   |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| a. Me han dado <b>45 €</b> :         | d. He ascendido <b>120 m</b> :    |
| b. Me he sumergido <b>25 m</b> :     | e. Murió en el <b>2004 d.C.</b> : |
| c. Nació en el año <b>201 a.C.</b> : | f. Debo <b>7 €</b> :              |

2. La temperatura mínima de hoy ha sido de **-15° C**. Si hasta alcanzar la temperatura máxima ha subido **4° C**, ¿cuál ha sido la temperatura máxima de hoy?

3. Una familia dispone cada mes de **2545 €**. Los gastos medios fijos son: **564 €** de alquiler; **46 €** de agua; **83 €** de luz; **210 €** del colegio de los hijos y **849 €** de otros gastos (alimentación, ropa,...).

- Expresa mediante operaciones combinadas la cantidad de dinero que pueden ahorrar en un mes.
- ¿Podrían comprar con lo que ahorran en cuatro meses un ordenador y una impresora que les costaría **2670 €**?



4. Completa el siguiente cuadrado mágico de forma que cada fila, cada columna y cada diagonal sumen  $-2$ :

$-8$	$5$	$6$	
	$-2$	$-3$	$0$
	$2$	$1$	
$4$			$7$

5. En un tren viajan un cierto número de pasajeros. En la primera estación suben  $15$  y bajan  $9$ . Al salir de la segunda estación, el número de pasajeros es el doble del que llevaba al entrar en ella. En la tercera estación sube un grupo de  $20$  excursionistas y no baja nadie, quedando en el tren  $92$  personas. ¿Cuántos pasajeros llevaba el tren al llegar a la primera estación?

6. Eva tiene  $4$  años más que su hermano Ricardo. Ricardo tiene  $2$  años menos que su amigo Roberto. Éste tiene  $7$  menos que su hermano Andrés, quien a su vez tiene  $22$  años menos que su padre, que ahora tiene  $51$  años. Calcula la edad de Eva.

7. Un día de invierno a las doce de la mañana, la temperatura en el patio del colegio era de  $-5^{\circ} C$ , y en el interior de la clase era de  $17^{\circ} C$ . ¿Cuál era la diferencia de temperatura entre el interior y el exterior?

8. Aristóteles, uno de los filósofos más influyentes de todos los tiempos, vivió entre los años  $106$  y  $43$  a.C. ¿A qué edad murió? ¿Cuántos años hace de eso?

9. Cicerón y Séneca fueron ciudadanos romanos que se distinguieron por ser unos buenos oradores que estuvieron metidos en política, lo que les costó la vida. Cicerón nació en el año  $106$  a.C. y vivió  $63$  años. Séneca nació  $47$  años después de la muerte de Cicerón y vivió  $61$  años. ¿En qué año murió Séneca?

10. Ayer la temperatura a las nueve de la mañana era de  $15^{\circ} C$ , a mediodía había subido  $6^{\circ} C$ , a las cinco de la tarde el termómetro marcaba  $3^{\circ} C$  más, a las nueve de la noche había bajado  $7^{\circ} C$  y a las doce de la noche había bajado otros  $4^{\circ} C$ . ¿Qué temperatura marcaba el termómetro a medianoche?

11. Un avión vuela a  $3500$  m de altura y un submarino está sumergido en el mar  $40$  m. ¿Qué altura, en metros, les separa?

12. La ciudad de Roma fue fundada en el año  $754$  antes de Cristo y Carlomagno fue coronado en el año  $800$  después de Cristo. ¿Cuántos años transcurrieron entre estos dos hechos?

13. Euclides nació en el año **300 a.C.** y Pitágoras en el año **580 a.C.** ¿Quién de los dos nació antes? ¿Cuántos años antes?
14. Para llenar un depósito de **5000 l** de capacidad, se deja abierto un grifo que arroja **28 l/min.** Si ha estado abierto dos horas y cuarto, ¿qué cantidad de agua falta para llenar el depósito?
15. Durante un día, un quiosco tiene **1807** periódicos y **209** revistas para vender. El beneficio de la venta de cada periódico es de **2 €** y el de cada revista de **3 €**. Si no ha vendido **37** periódicos y **13** revistas, ¿cuál fue el beneficio obtenido ese día?
16. Un coche sale de Granada y recorre **75 km** en dirección a Jaén. Da la vuelta y recorre **48 km** en sentido contrario. ¿A qué distancia se encuentra ahora de Granada? Si la distancia de Granada a Jaén es de **92 km**, ¿a qué distancia está de Jaén?
17. ¿Cuántos años vivió un hombre que nació en el año **29 a..C.** y murió en el año **43 d.C.**?
18. De un depósito que contenía **520 l** de agua se sacaron primero **170 l** y después **145 l**. Posteriormente se echaron **210 l**. ¿Cuántos litros tiene ahora el depósito?
19. Pablo y Juan entran en el supermercado con **245 €** y salen con **67 €**. ¿Qué cantidad han gastado?
20. Aníbal nació en el año **274** antes de Cristo y el Cid en el año **1003**. ¿Cuántos años transcurrieron entre ambos nacimientos?
21. La era de los romanos comienza en el año **754 a.C.** y la de los musulmanes en el **622 d.C.** ¿Cuántos años transcurrieron desde el comienzo de la era romana hasta el comienzo de la musulmana?

### 3.8. BIBLIOGRAFÍA.

Para la elaboración de estos apuntes, se ha utilizado como material:

1º Mayoritariamente, las explicaciones y ejercicios propuestos en clase por los profesores del Departamento de Matemáticas del Colegio Virgen de Gracia (Granada).

2º Para desarrollar y completar algunos temas, apuntes y ejercicios obtenidos de:

-Internet:

- (A) <http://www.marin.esc.edu.ar/dock1/acquaviva/> Silvina L. Acquaviva
- (B) <http://www.elosiodelosantos.com/> Sergio de los Santos-Francisco Osio
- (C) <http://www.terra.es/personal2/jpb00000/> Juan del Pozo Baselga
- (D) <http://platea.pntic.mec.es/jescuder/> Jesús Escudero Martín
- (E) <http://www.fisicanet.com/> Ricardo Santiago Netto
- (F) <http://www.imaginativa.cl/~profesores> Nelson Lillo Teran

-Libros de texto:

- (A) Anzola, M. y otros: “*Números 1*”, Ediciones SM, 1997.
- (B) Anzola, M. y otros: “*Números 2*”, Ediciones SM, 1998.
- (C) Anzola, M. y otros: “*Algoritmo 2000*”, Ediciones SM, 1998.
- (D) Anzola, M. y otros: “*Gauss*”, Ediciones SM, 2002.
- (E) Guasch, M. y otros: “*Matemáticas 1*”, Guadiel-Grupo Edebé, 1996.
- (F) Fuster, M. y otros: “*Matemáticas 2*”, Guadiel-Grupo Edebé, 1997.
- (G) Doménech, A. y otros: “*Matemáticas 3*”, Guadiel-Grupo Edebé, 1995.
- (H) Fuster, M. y otros: “*Matemáticas 4*”, Guadiel-Grupo Edebé, 1996.
- (I) Berenguer, L. y otros: “*Construir las Matemáticas 1*”, Proyecto Sur, 1998.
- (J) Berenguer, L. y otros: “*Construir las Matemáticas 2*”, Proyecto Sur, 1997.
- (K) Berenguer, L. y otros: “*Construir las Matemáticas 3*”, Proyecto Sur, 1998.
- (L) Berenguer, L. y otros: “*Construir las Matemáticas 4*”, Proyecto Sur, 1999.
- (M) Colera, J. y otros: “*Matemáticas 1 Andalucía*”, Grupo Anaya, 1997 y 2000.
- (N) Colera, J. y otros: “*Matemáticas 2 Andalucía*”, Grupo Anaya, 1997 y 2000.
- (Ñ) Colera, J. y otros: “*Matemáticas 3 Andalucía*”, Grupo Anaya, 1995 y 1998.
- (O) Colera, J. y otros: “*Matemáticas 4A Andalucía*”, Grupo Anaya, 1995 y 1998.
- (P) Colera, J. y otros: “*Matemáticas 4B Andalucía*”, Grupo Anaya, 1995 y 1998.