

8. EXPONENCIALES y LOGARITMOS.

8.1. Introducción.

En las ciencias experimentales aparecen constantemente expresiones aritméticas que, por un lado, son claras, y por otro presentan grandes dificultades a la hora de calcularlas. Por ejemplo, $\sqrt[7]{2,4} = (2,4)^{\frac{1}{7}}$ es un número que elevado a 7 da 2,4, pero no disponemos de un procedimiento simple para calcularlo. Similares dificultades presentan $2^{6,4}$; $3,2^{1,5}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = 7^{-\frac{1}{3}}$ o, en general, el cálculo de cualquier potencia en la que, conocida la base, el exponente no es un número entero.

Idear métodos particulares rápidos para el cálculo de cada uno de estos tipos de expresiones resulta imposible. Esta necesidad de acelerar los procesos de cálculo aritmético llevó al matemático escocés John Napier (1550-1617), barón de Merchiston, quien se interesó fundamentalmente por el cálculo numérico y la trigonometría, a inventar los logaritmos (palabra de origen griego compuesta de logos=tratado y arithmos=números). Según sus propias palabras: "...en la medida de mis capacidades me proponía evitar las difíciles y tediosas operaciones de cálculo, cuyo fastidio constituye una pesadilla para muchos que se dedican al estudio de las matemáticas". En 1614, y tras veinte años de trabajo, publicó su obra *Logarithmorum canonis descriptio*, donde explica cómo se utilizan los logaritmos, pero no relata el proceso que le llevó a ellos. Un año después, en 1615, el matemático inglés Henry Briggs (1561-1631), visitó a Napier y le sugirió utilizar como base de los logaritmos el número 10. A Napier le agradó la idea y se comprometieron a elaborar las tablas de los logaritmos decimales. Napier muere al cabo de dos años escasos y se queda Briggs con la tarea. En 1618, Briggs publicó *Logarithmorum Chiliae prima*, primer tratado sobre los logaritmos vulgares o de Briggs, cuya base es el número 10. Briggs hizo el cálculo de las tablas de logaritmos de **1** a **20.000** y de **90.000** a **100.000**. En 1620, el hijo de Napier publicó la obra de su padre *Mirifici logarithmorum canonis constructio* («Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos») donde ya se explica el proceso seguido por Napier, mediante la comparación de progresiones y la utilización de unas varillas cifradas, llamadas varillas o regletas de Napier, para llegar a sus resultados sobre los logaritmos. Las tablas de los logaritmos decimales de Briggs fueron completadas de **1** a **100.000** en 1628 por el matemático Vlacq.

Estos resultados fueron muy bien acogidos por el mundo científico del momento, que no dudó en utilizarlos para la resolución de cálculos numéricos que hasta ese momento eran pesadísimos o incluso imposibles de realizar.

Así pues, tradicionalmente, el estudio de los logaritmos ha ido inevitablemente acompañado de las tablas logarítmicas y del estudio de conceptos tales como el de mantisa, característica, cologaritmo... Hoy día esto ya no es necesario, por lo que prescindiremos de las tablas y de su explicación.

Con la creciente utilización de las calculadoras en todos los niveles, el cálculo logarítmico se ha simplificado enormemente y su aplicación directa ha quedado aparentemente escondida, aunque las mismas calculadoras realizan muchos cálculos gracias a los logaritmos que son capaces de calcular en cada paso.

Además, es importante llamar la atención sobre el hecho de que si utilizamos la calculadora en último lugar, después de haber utilizado todas las propiedades y haber simplificado las expresiones en que aparecen los logaritmos, el resultado obtenido siempre será más preciso que si utilizamos a cada paso la calculadora, pues los errores se van acumulando. Ésta es la justificación práctica más importante que tiene el hecho de que merezca la pena aprender todas las propiedades que cumplen los logaritmos, ya que si no sólo sería justificable desde un punto de vista teórico o de pura curiosidad científica.

8.2. Exponenciales.

(A) Analicemos despacio los siguientes ejemplos.

$$7^2 = 49 \quad ; \quad 6^3 = 216 \quad ; \quad (-3)^2 = 9 \quad ; \quad (-2)^3 = -8$$

$$0^4 = 0 \quad ; \quad 0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0} = ???$$

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \quad pq \quad 5^2 = 25 \quad ; \quad (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

$$1^0 = 1 \quad ; \quad 1^3 = 1 \quad ; \quad 1^{-2} = \frac{1}{1^2} = 1 \quad ; \quad 1^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1^2} = \sqrt[3]{1} = 1$$

Descubrimos una serie de cuestiones interesantes:

- Las potencias que tienen una base positiva, siempre proporcionan un resultado positivo.
- Las potencias que tienen base 0 no siempre se pueden hacer.
- Las potencias de base negativa, unas veces dan un resultado positivo (si el exponente es par) y otras veces negativo (si el exponente es impar), además de que no siempre se pueden realizar (raíces de índice par y radicando negativo).
- Las potencias de exponente 1 siempre dan como resultado 1 .

(B) Una *exponencial* de base a , siendo a un número real positivo y distinto de 1 ($a > 0$, $a \neq 1$), y exponente x , es el resultado de elevar a a x .

Podemos considerar, por tanto, que estamos trabajando con potencias, sólo que con una serie de características muy concretas:

1. La base es positiva (para tener la garantía de que siempre podemos realizar la potencia, independientemente de cual sea el exponente) y distinta de 1 (ya que todas las potencias de base 1 dan como resultado 1 y, por tanto, no tienen mayor interés).
2. El exponente puede ser cualquier número real (incluido un número irracional, aunque para poder calcular expresiones de este tipo tengamos que recurrir a los logaritmos).

De entre todas las exponenciales que podemos definir, que dependen de la base escogida y que, por tanto, siempre tenemos que especificar (p.e. 2^x “exponencial de base 2”), hay una especialmente importante, por las propiedades que posee como función. Es la exponencial de base el número e y que simplemente llamaremos “la exponencial” (sin especificar la base), e^x . Recordemos que dicho número tiene gran importancia en las Matemáticas, es irracional y se

obtiene como el límite de una sucesión:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281\dots$$

En cualquier caso, por establecer una diferencia entre los conceptos de potencia y exponencial, se suele hablar de potencia cuando el exponente es conocido y la base no, mientras que en una exponencial lo conocido es la base y el exponente no.

POTENCIAS				EXPONENCIALES
x^2	x^{-6}	$x^{\frac{2}{3}}$	x^π	2^x
2^8	7^{-2}	$9^{-\frac{1}{3}}$	11^e	$\left(\frac{3}{5}\right)^x$
$(-7)^3$	$(-1)^{-4}$	$(-2)^{\frac{3}{5}}$	$(-4)^{\sqrt[3]{3}}$	e^x
$\left(\frac{3}{5}\right)^5$	$\left(\frac{-2}{9}\right)^{-3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{4}{3}}$	$\left(\frac{-6}{7}\right)^{\frac{5}{\sqrt{2}}}$	9^{-2x+1}
π^1	e^{-5}	$\pi^{\frac{1}{2}}$	π^π	$\frac{1}{\pi^x}$

(C) *Ejemplos:* Por tanto, para calcular una exponencial en la que el exponente sea un número racional, actuaríamos como ya es conocido, y lo único novedoso sería que el exponente fuera un número irracional.

Exponente natural	Exponente entero	Exponente racional	Exponente real
$a^n = a \cdot \dots \cdot a$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$	$a^{\frac{n}{d}} = \sqrt[d]{a^n}$	$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$
$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$ $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$ $\left(\frac{-4}{5}\right)^2 = \frac{-4}{5} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{16}{25}$ $\pi^2 = \pi \cdot \pi \approx 9,86965056$	$5^{-3} = 5^{1-4} = \frac{5}{5^4} = \frac{5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ $(-9)^{-1} = \frac{1}{(-9)^1} = \left(\frac{-1}{9}\right)^1 = \frac{-1}{9}$ $\left(\frac{7}{8}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \left(\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{64}{49}$	$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$; $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$ $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3/2} = \left(\frac{9}{4}\right)^{3/2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3} = \sqrt{\frac{729}{64}} = \frac{27}{8}$	$2^\pi \approx 8,825$ pq $\log_2 8,825 \approx \pi$ $\log_5 25 = 2$ pq $5^2 = 25$ $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$ pq $2^{-3} = \frac{1}{8}$ $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ pq $9^{\frac{1}{2}} = 3$ $\log 1000 = 3$ pq $10^3 = 1000$ $\ln e^{-2} = -2$ pq $e^{-2} = e^{-2}$

(D) *Propiedades de la exponencial.*

Las propiedades son las mismas que cumplen las potencias:

1. *Exponencial de exponente cero:* $a^0 = 1$
2. *Exponencial de exponente uno:* $a^1 = a$
3. *Producto de exponenciales de igual base:* $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
4. *Producto de exponenciales de igual exponente:* $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ ó $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
5. *Cociente de exponenciales de igual base:* $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
6. *Cociente de exponenciales de igual exponente:* $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ ó $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
7. *Exponencial de una exponencial:* $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
8. *Toda exponencial da como resultado un número positivo:* $a^x > 0$ (cualquier potencia de base positiva da como resultado un número positivo).

8.3. Logaritmos.

(A) El *logaritmo* de un número real a positivo y distinto de 0 ($a > 0$), en una base b real positiva distinta de 0 y de 1 ($b > 0, b \neq 1$), es el número c al que habrá que elevar la base b para obtener el número a : $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$.

(B) *Ejemplos:*

Notación logarítmica		Notación exponencial
$\log_2 8 = 3$	\Leftrightarrow	$2^3 = 8$
$\log_{1/2} 4 = -2$	\Leftrightarrow	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
$\log_9 3 = \frac{1}{2}$	\Leftrightarrow	$9^{\frac{1}{2}} = 3$
$\log_7 7^3 = 3$	\Leftrightarrow	$7^3 = 7^3$

Podemos deducir de la definición que el logaritmo es la operación contraria de la exponencial y viceversa:

$\log_b (b^x) = x$ ya que, pasando a notación exponencial, $b^x = b^x$

$b^{\log_b x} = x$ ya que, pasando a notación logarítmica, $\log_b x = \log_b x$

(C) *Logaritmos especiales:*

Sabemos que la base de un logaritmo puede ser cualquier número real positivo distinto de 0 y de 1 . Dentro de esos números hay dos que merecen especial atención y se escriben de forma diferente a los demás. Además, son los dos que podemos encontrar en cualquier calculadora científica.

1. $b=10$ Se llaman *logaritmos decimales* y son los que tienen por base el número 10 :

$$\log_{10} a = \log a$$

2. $b=e$ Se llaman *logaritmos neperianos* y son los que tienen por base el número e :

$$\log_e a = \ln a = La$$

(D) *Consecuencias de la definición de logaritmo:*

1. El logaritmo de la unidad, en cualquier base, es 0 : $\log_a 1 = 0$ pq $a^0 = 1$
2. El logaritmo, en cualquier base, de la propia base es 1 : $\log_a a = 1$ pq $a^1 = a$
3. El logaritmo de una potencia cuya base es igual a la base del logaritmo es igual al exponente de la potencia: $\log_a a^n = n$ pq $a^n = a^n$
4. No existe el logaritmo, en cualquier base, de un número negativo o de cero, ya que es imposible que el resultado de elevar un número positivo (la base del logaritmo) a otro número dé como resultado un número negativo o cero:

$$\log_3(-9) = ??? \text{ ya que } 3^{???} = -9 \text{ es imposible.}$$

5. El logaritmo de un número mayor que 0 y menor que 1 , es negativo si la base del logaritmo es mayor que 1 : $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ pq $3^{-2} = \frac{1}{9}$

6. El logaritmo de un número mayor que 0 y menor que 1 , es positivo si la base del logaritmo es menor que 1 : $\log_{1/3} \frac{1}{9} = 2$ pq $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

7. El logaritmo de un número mayor que 1 es positivo si la base del logaritmo es mayor que 1 : $\log_3 9 = 2$ pq $3^2 = 9$

8. El logaritmo de un número mayor que 1 es negativo si la base del logaritmo es menor que 1 :

$$\log_{1/5} 25 = -2 \quad pq \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$$

Estas últimas cuatro consecuencias se pueden resumir en el siguiente esquema:

$$0 < b < 1:$$

$$\begin{cases} \log_b x > 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \log_b x < 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b > 1:$$

$$\begin{cases} \log_b x < 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \log_b x > 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(E) *Propiedades de los logaritmos:*

Las propiedades que cumplen los logaritmos están relacionadas con las que cumplen las exponenciales. Así tenemos:

Logaritmo de un producto:

El logaritmo de un producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de ellos: $\log_b (A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$

Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} \log_b (A \cdot B) = z \Leftrightarrow b^z = A \cdot B \\ \log_b A = x \Leftrightarrow b^x = A \\ \log_b B = y \Leftrightarrow b^y = B \end{array} \right\} \Rightarrow b^z = A \cdot B = b^x \cdot b^y = b^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Ejemplos: Conocidos $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$, calcular $\log 6$, $\log 9$ y $\log 12$.

$$\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0,3010 + 0,4771 = 0,7781$$

$$\log 9 = \log (3 \cdot 3) = \log 3 + \log 3 = 0,4771 + 0,4771 = 0,9542$$

$$\log 12 = \log (2 \cdot 2 \cdot 3) = \log 2 + \log 2 + \log 3 = 1,0791$$

En el último ejemplo podemos comprobar que el resultado anterior se puede generalizar para más de dos factores, lo que permite, como una consecuencia, obtener la siguiente propiedad:

Logaritmo de una potencia:

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia:

$$\log_b A^n = n \cdot \log_b A$$

Demostración:

$$\log_b A^n = \log_b \left(\overset{(n)}{A \cdot \dots \cdot A} \right) = \log_b A + \dots + \log_b A = n \cdot \log_b A$$

Ejemplos: Conocidos $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$, calcular $\log 32$, $\log 9$ y $\log 36$.

$$\log 32 = \log (2^5) = 5 \cdot \log 2 = 5 \cdot 0,3010 = 1,505$$

$$\log 9 = \log (3^2) = 2 \cdot \log 3 = 2 \cdot 0,4771 = 0,9542$$

$$\log 36 = \log (2^2 \cdot 3^2) = \log 2^2 + \log 3^2 = 2 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 2 \cdot 0,3010 + 2 \cdot 0,4771 = 1,5562$$

A su vez, como consecuencia de esta propiedad, podemos deducir la siguiente:

Logaritmo de una raíz:

El logaritmo de una raíz es igual al inverso del índice por el logaritmo del radicando:

$$\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \cdot \log_b A$$

Demostración:

$$\log_b \sqrt[n]{A} = \log_b A^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_b A$$

Ejemplos: Conocidos $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$, calcular $\log \sqrt{2}$, $\log \sqrt[5]{27}$ y $\log \sqrt[3]{3,6}$.

$$\log \sqrt{2} = \log \left(2^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \log 2 = \frac{1}{2} \cdot 0,3010 = 0,1505$$

$$\log \sqrt[5]{27} = \log \left(\sqrt[5]{3^3} \right) = \log \left(3^{\frac{3}{5}} \right) = \frac{3}{5} \cdot \log 3 = \frac{3}{5} \cdot 0,4771 = 0,2863$$

$$\log \sqrt[3]{3,6} = \frac{1}{3} \cdot \log \left(\frac{36}{10} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left[\log (2^2 \cdot 3^2) - \log 10 \right] = 0,1854$$

Logaritmo de un cociente:

El logaritmo de un cociente de dos números es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador (diferencia de logaritmos): $\log_b \left(\frac{A}{B} \right) = \log_b A - \log_b B$

Demostración:

$$\log_b \left(\frac{A}{B} \right) = \log_b (A \cdot B^{-1}) = \log_b A + \log_b B^{-1} = \log_b A + (-1) \cdot \log_b B = \log_b A - \log_b B$$

Ejemplos: Conocidos $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$, calcular $\log 5$, $\log \left(\frac{2}{3} \right)$ y $\log 1,5$.

$$\log 5 = \log \left(\frac{10}{2} \right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,3010 = 0,699$$

$$\log \left(\frac{2}{3} \right) = \log 2 - \log 3 = 0,3010 - 0,4771 = -0,1761$$

$$\log 1,5 = \log \left(\frac{3}{2} \right) = \log 3 - \log 2 = 0,4771 - 0,3010 = 0,1761$$

Obsérvese que las propiedades anteriores se refieren al logaritmo de un producto, un cociente, una potencia y una raíz, pero nada se ha dicho sobre el logaritmo de una suma o una resta. El logaritmo de una suma o de una resta no admite desarrollo.

Además, se refieren al logaritmo de un producto, NO a un producto de logaritmos, o al logaritmo de un cociente, NO a un cociente de logaritmos.

Cambio de la base de un logaritmo:

Para un mismo número existen infinitos logaritmos, dependiendo de la base que se tome. Por ejemplo, el logaritmo de 8 es 1; -1; 3; -3; 0,903090; 2,079441;... según que la base considerada sea 8; 1/8; 2; 1/2; 10; e;...

Es posible cambiar de una base a otra sin más que aplicar la propiedad que veremos a continuación. Pero, ¿por qué es tan importante saber cambiar la base de un logaritmo? La respuesta más práctica la encontramos en la calculadora, en la que sólo podemos calcular logaritmos decimales o neperianos, de forma que si necesitamos calcular el logaritmo de un número en cualquier otra base, debemos transformarlo en un logaritmo decimal o neperiano. Para hacerlo:

El logaritmo de un número en cualquier base es igual al logaritmo de ese número en otra base partido por el logaritmo de la base antigua en la nueva base: $\log_b A = \frac{\log_c A}{\log_c b}$

Demostración:

$$\log_b A = x \Leftrightarrow b^x = A \Rightarrow \log_c b^x = \log_c A \Rightarrow x \cdot \log_c b = \log_c A \Rightarrow x = \log_b A = \frac{\log_c A}{\log_c b}$$

Ejemplos:

1. Calcular $\log_7 2$.

$$\log_7 2 = \frac{\log 2}{\log 7} = \frac{0,3010}{0,8451} = 0,3562 \quad \text{o} \quad \log_7 2 = \frac{L2}{L7} = \frac{0,6931}{1,9459} = 0,3562$$

2. Sabiendo que $\log_7 2 = 0,3562$, calcular $\log_2 7$.

$$\log_2 7 = \frac{\log_7 7}{\log_7 2} = \frac{1}{0,3562} = 2,8074$$

Como consecuencia de la propiedad del cambio de base, obtenemos las siguientes relaciones entre logaritmos (se pueden comprobar fácilmente y, por tanto, es un ejercicio sencillo):

-Relación entre los logaritmos en base b y en base $1/b$: $\log_{1/b} A = -\log_b A$

-Relación entre $\log_b a$ y $\log_a b$: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

(F) Ejercicios resueltos:

1. Calcular $\log_2 64$, $\log_{1/2} 4$ y $\log_7 \left(\frac{1}{7}\right)$.

$$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \cdot \log_2 2 = 6 \cdot 1 = 6$$

Sol.

$$\log_{1/2} 4 = \log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$$

$$\log_7 \left(\frac{1}{7}\right) = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1 \quad \text{o} \quad \log_7 \left(\frac{1}{7}\right) = \log_7 7^{-1} = -1 \cdot \log_7 7 = -1$$

2. Desarrollar el logaritmo de las expresiones $A = \frac{7x^3}{y^2}$, $B = \frac{xy^3}{\sqrt[3]{2z^4}}$ y $C = \sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}}$.

Sol. Podemos utilizar el logaritmo que queramos, ya que la única diferencia en la expresión final será la base del logaritmo, dado que las propiedades que se aplican son independientes de la base y, por tanto, son válidas utilizemos el logaritmo que utilizemos.

$$\log_2 A = \log_2 \left(\frac{7x^3}{y^2}\right) = \log_2 (7x^3) - \log_2 y^2 = (\log_2 7 + \log_2 x^3) - \log_2 y^2 = \log_2 7 + 3 \cdot \log_2 x - 2 \cdot \log_2 y$$

$$\log B = \log \frac{xy^3}{\sqrt[3]{2z^4}} = \log (xy^3) - \log (\sqrt[3]{2z^4}) = \log x + \log y^3 - \frac{1}{3} \cdot \log (2z^4) =$$

$$= \log x + 3 \cdot \log y - \frac{1}{3} \cdot [\log 2 + \log z^4] = \log x + 3 \cdot \log y - \frac{1}{3} \cdot [\log 2 + 4 \cdot \log z] =$$

$$= \log x + 3 \cdot \log y - \frac{1}{3} \cdot \log 2 - \frac{4}{3} \cdot \log z$$

$$LC = L\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot L(2\sqrt{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot [L2 + L(\sqrt{2}\sqrt{2})] = \frac{1}{2} \cdot [L2 + \frac{1}{2} \cdot L(2\sqrt{2})] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ L2 + \frac{1}{2} \cdot [L2 + L\sqrt{2}] \right\} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ L2 + \frac{1}{2} \cdot [L2 + \frac{1}{2} \cdot L2] \right\} = \frac{1}{2} \cdot L2 + \frac{1}{4} \cdot L2 + \frac{1}{8} \cdot L2 = \frac{7}{8} \cdot L2$$

3. Si $\log E = 3 \cdot \log x + 2 \cdot \log y - \frac{1}{2} \cdot \log z$ y $\log A = 2 \cdot \log 3 - \frac{1}{2} \cdot \log y + \frac{3}{4} \cdot \log x$, obtener la expresión de E y A a partir del desarrollo de su logaritmo.

$$\log E = 3 \cdot \log x + 2 \cdot \log y - \frac{1}{2} \cdot \log z = \log x^3 + \log y^2 - \log \sqrt{z} = \log \left(\frac{x^3 y^2}{\sqrt{z}}\right)$$

Sol. Por tanto, $E = \frac{x^3 y^2}{\sqrt{z}}$.

$$LA = L3^2 - Ly^{\frac{1}{2}} + L\sqrt[4]{x^3} = L9 + L\sqrt[4]{x^3} - L\sqrt{y} = L\left(\frac{9 \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{y}}\right)$$

Por tanto, $A = \frac{9 \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{y}}$.

4. Calcular x para que cada una de las siguientes expresiones sea cierta:

$$\log_x 8 = \frac{1}{2} ; \log_x \frac{1}{9} = -2 ; \log_{27} x = \frac{1}{3} ; \log 0,01 = x ; \log_{1/2} x = -1$$

$$\log_x 8 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = 8 \Leftrightarrow x = 64$$

Sol. $\log_x \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = 3$

$$\log_{27} x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 27^{\frac{1}{3}} = x \Leftrightarrow x = 3$$

$$\log 0,01 = x \Leftrightarrow 10^x = 0,01 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\log_{1/2} x = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = x \Leftrightarrow x = 2$$

5. a) Dado $\log 25 = 1,3979$, calcular $L25$.

b) Dado $L17 = 0,8332$, calcular $\log 17$.

c) Calcular $\log_{1/6} 216$, sabiendo que $\log_6 216 = 3$.

d) Calcular $\log_3 10$, sabiendo que $\log 3 = 0,4771$.

$$L25 = \frac{\log 25}{\log e} = \frac{1,3979}{0,4343} = 3,2187$$

Sol. $\log 17 = \frac{L17}{L10} = \frac{2,8332}{2,3026} = 1,2304$

$$\log_{1/6} 216 = -\log_6 216 = -3$$

$$\log_3 10 = \frac{1}{\log 3} = \frac{1}{0,4771} = 2,0960$$

6. Conocidos $\log 2 = 0,301$ y $\log 3 = 0,478$, calcular $\log_5 \frac{\sqrt{18}}{(0,32)^3}$.

Sol. Existen dos formas de hacer este ejercicio.

a) Realizando en primer lugar el cambio de base y aplicando, posteriormente las propiedades:

$$\begin{aligned} \log_5 \frac{\sqrt{18}}{(0,32)^3} &= \frac{\log \frac{\sqrt{18}}{(0,32)^3}}{\log 5} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \log 18 - 3 \cdot \log \left(\frac{32}{100}\right)}{\log \frac{10}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \log (2 \cdot 3^2) - 3 \cdot \log \left(\frac{2^5}{10^2}\right)}{\log 10 - \log 2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\log 2 + 2 \cdot \log 3) - 3 \cdot (5 \cdot \log 2 - 2 \cdot \log 10)}{\log 10 - \log 2} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (0,301 + 2 \cdot 0,478) - 3 \cdot (5 \cdot 0,301 - 2 \cdot 1)}{\log 10 - \log 2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (0,301 + 0,956) - 3 \cdot (1,505 - 2)}{\log 10 - \log 2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1,257 - 3 \cdot (-0,495)}{\log 10 - \log 2} = \frac{0,629 + 1,485}{0,699} = 3,024 \end{aligned}$$

b) Aplicando en primer lugar las propiedades y, posteriormente, el cambio de base:

$$\begin{aligned} \log_5 \frac{\sqrt{18}}{(0,32)^3} &= \log_5 \sqrt{18} - \log_5 (0,32)^3 = \frac{1}{2} \cdot \log_5 (2 \cdot 3^2) - 3 \cdot \log_5 \left(\frac{8}{25}\right) = \frac{1}{2} \cdot [\log_5 2 + 2 \cdot \log_5 3] - 3 \cdot [\log_5 2^3 - \log_5 25] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\log 2}{\log 5} + 2 \cdot \frac{\log 3}{\log 5} \right] - 3 \cdot \left[3 \cdot \frac{\log 2}{\log 5} - 2 \right] \stackrel{\substack{\log 5 = \log \left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 \\ = 1 - 0,3010 = 0,699}}{=} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{0,301}{0,699} + 2 \cdot \frac{0,478}{0,699} \right] - 3 \cdot \left[3 \cdot \frac{0,301}{0,699} - 2 \right] = 3,021 \end{aligned}$$

(G) Ejercicios propuestos:

1) Expresa algebraicamente:

Expresión logarítmica	Expresión algebraica
a) $\log A = 2 \cdot \log 3 - \frac{1}{2} \cdot \log y + \frac{3}{4} \cdot \log x$	
b) $\log B = 3 \cdot \log 2 - \frac{2}{3} \cdot \log x + 5 \cdot \log y - 4 \cdot \log z$	
c) $\log C = 2 \cdot \log 7 - 3 \cdot \log x - \frac{4}{5} \cdot \log y + \frac{1}{2} \cdot \log z$	
d) $\log D = 3 \cdot \log 2 - \frac{1}{2} \cdot \log x + \frac{3}{4} \cdot \log y - 5 \cdot \log z$	

2) Expresa con logaritmos:

	Expresión logarítmica		Expresión logarítmica
a) $A = \frac{7x^3}{y^2}$		c) $C = \frac{27x^4 \cdot \sqrt[3]{7^4}}{8 \cdot \sqrt[7]{y^2}}$	
b) $B = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x}}{y^3 z}$		d) $D = \frac{3x^2 \cdot \sqrt[5]{4^3}}{2z^3 \cdot \sqrt{7}}$	

3) Sabiendo que $\log 2 = 0,31$ y $\log 3 = 0,47$, calcula:

	Solución		Solución
a) $\log_{3,6} \frac{5 \cdot \sqrt{2,7}}{64}$		f) $\log \frac{10,8}{\sqrt{14,4}}$	
b) $\log_{\sqrt{3}} \frac{(3,6)^2 \cdot 5}{2,4}$		g) $\log_{3,6} \frac{24}{5}$	
c) $\log_{\sqrt{24}} \frac{3 \cdot (1,5)^3}{32}$		h) $\log_3 (0,75 \cdot \sqrt{96})$	
d) $\log \frac{0,12}{\sqrt{3}}$		i) $\log_{\sqrt{6}} \frac{(3,2)^5 \cdot \sqrt[3]{18}}{\sqrt{0,06}}$	
e) $\log \frac{\sqrt{7,5}}{48}$		j)	

4) Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

	Solución		Solución
a) $\log_2 32$		f) $\log_5 \frac{25 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[3]{125}}$	$\frac{19}{10}$
b) $\log_2 \sqrt{8}$		g) $\log_2 \frac{\sqrt[6]{64} \cdot 16}{32 \cdot \sqrt[3]{512}}$	
c) $\log_3 81$		h) $\log_3 \frac{27 \cdot \sqrt{729}}{81 \cdot \sqrt[3]{9}}$	
d) $\log_2 \frac{16}{\sqrt{62}}$		i) $\log_5 \frac{25 \cdot \sqrt[3]{625}}{125^2}$	
e) $\log_3 \sqrt[4]{27}$		j) $\log_7 \frac{49 \cdot \sqrt{343}}{\sqrt[3]{2401}}$	

5) Halla el valor de x en las siguientes expresiones:

	Solución		Solución
a) $\log_x 25 = 2$		f) $Lx = 2$	
b) $\log_x 81 = -4$		g) $\log_{7/4} x = -3$	
c) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$		h) $\log_2 x = \frac{3}{2}$	
d) $\log_x 5 = -\frac{1}{2}$		i) $\log_{2/5} (0,16) = x$	
e) $\log x = -3$		j) $\log (0,0001) = x$	

8.4. BIBLIOGRAFÍA.

Para la elaboración de estos apuntes, se ha utilizado como material:

1º Mayoritariamente, las explicaciones y ejercicios propuestos en clase por los profesores del Departamento de Matemáticas del Colegio Virgen de Gracia (Granada). Algunos alumnos/as del Colegio han colaborado en la redacción de los mismos.

2º Para desarrollar y completar algunos temas, apuntes y ejercicios obtenidos de:

-Internet:

- (A) <http://www.marin.esc.edu.ar/dock1/acquaviva/> Silvina L. Acquaviva
- (B) <http://www.elosiodelosantos.com/> Sergio de los Santos-Francisco Osio
- (C) <http://www.terra.es/personal2/jpb00000/> Juan del Pozo Baselga
- (D) <http://platea.pntic.mec.es/jescuder/> Jesús Escudero Martín
- (E) <http://www.fisicanet.com/> Ricardo Santiago Netto
- (F) <http://www.imaginativa.cl/~profesores> Nelson Lillo Teran

-Libros de texto:

- (A) Anzola, M. y otros: “*Números 1*”, Ediciones SM, 1997.
- (B) Anzola, M. y otros: “*Números 2*”, Ediciones SM, 1998.
- (C) Anzola, M. y otros: “*Algoritmo 2000*”, Ediciones SM, 1998.
- (D) Anzola, M. y otros: “*Gauss*”, Ediciones SM, 2002.
- (E) Guasch, M. y otros: “*Matemáticas 1*”, Guadiel-Grupo Edebé, 1996.
- (F) Fuster, M. y otros: “*Matemáticas 2*”, Guadiel-Grupo Edebé, 1997.
- (G) Doménech, A. y otros: “*Matemáticas 3*”, Guadiel-Grupo Edebé, 1995.
- (H) Fuster, M. y otros: “*Matemáticas 4*”, Guadiel-Grupo Edebé, 1996.
- (I) Berenguer, L. y otros: “*Construir las Matemáticas 1*”, Proyecto Sur, 1998.
- (J) Berenguer, L. y otros: “*Construir las Matemáticas 2*”, Proyecto Sur, 1997.
- (K) Berenguer, L. y otros: “*Construir las Matemáticas 3*”, Proyecto Sur, 1998.
- (L) Berenguer, L. y otros: “*Construir las Matemáticas 4*”, Proyecto Sur, 1999.
- (M) Colera, J. y otros: “*Matemáticas 1 Andalucía*”, Grupo Anaya, 1997 y 2000.
- (N) Colera, J. y otros: “*Matemáticas 2 Andalucía*”, Grupo Anaya, 1997 y 2000.
- (Ñ) Colera, J. y otros: “*Matemáticas 3 Andalucía*”, Grupo Anaya, 1995 y 1998.
- (O) Colera, J. y otros: “*Matemáticas 4A Andalucía*”, Grupo Anaya, 1995 y 1998.
- (P) Colera, J. y otros: “*Matemáticas 4B Andalucía*”, Grupo Anaya, 1995 y 1998.